Geçiş Matrisi

Tanım 4. Durum uzayı $E = \{0,1,2,\dots\}$ olan bir Markov zincirinin bir adım geçiş olasılıklarının oluşturduğu matrise *geçiş matrisi* denir. Aşağıdaki gibi oluşturulur.

$E = \{0,1,2,\dots,m\}$,

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & \cdots & p_{0m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m0} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

Eğer durum uzayı sonsuz ise yani $E = \{0,1,2,\dots\}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{01} & p_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Geçiş matrisinin tanımı göz önüne alındığında bu matrisin bir Stokastik Matris olduğu sonucu ortaya çıkar. Yani ;

1. $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$

2. $p_{ij} \geq 0$

Örnek. Aşağıdaki matrislerden hangileri Stokastik matristir.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7 & -0,2 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & 0,2 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

P_1 matrisi için, $p_{13} < 0$ olduğundan Stokastik matris değildir.

P_2 matrisi için, $\sum_{j \in E} p_{2j} \neq 1$ olduğundan Stokastik matris değildir.

P_3 Stokastik matris ve P_4 çift Stokastik matristir.

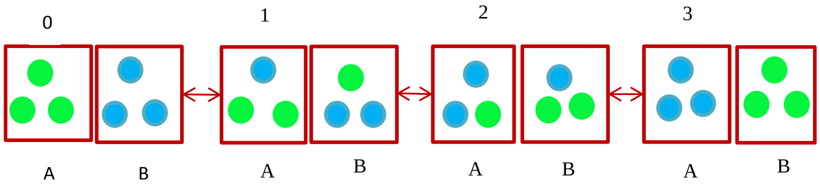
Örnek 1. Bir ile ait hava tahminleri güneşli, yağmurlu ve bulutlu olarak tahmin ediliyor. Önceki yıllara ait verilerden yola çıkarak bu ilde yağmurlu bir günü 0.6 olasılıkla başka bir yağmurlu gün, 0.3 olasılıkla bulutlu bir gün ve 0.1 olasılıkla güneşli bir günün takip ettiği biliniyor. Bulutlu bir günün hemen ardından ise 0.3 olasılıkla başka bir bulutlu gün, 0.2 olasılıkla güneşli bir gün ve 0.5 olasılıkla yağmurlu bir gün gelmektedir. Benzer şekilde güneşli bir günü sırasıyla 0.5 , 0.4 ve 0.1 olasılıklarıyla güneşli, yağmurlu ve bulutlu bir gün izlemektedir. Şimdi bu ile ait bu hava durumu tahminini bir kesikli parametreli kesikli durum uzaylı Markov zinciri olarak tanımlayabiliriz:

Durum uzayını $E = \{Y, B, G\}$ olarak tanımlarsak (Y: yağmurlu gün, B: bulutlu gün, G: güneşli gün). Bu Markov zincirinin bir adım geçiş matrisi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Örnek 2. **A** torbasında 1 mavi 2 yeşil bilye, **B** torbasında 1 yeşil 2 mavi bilye vardır. Her adımda her iki torbadan aynı anda birer bilye rastgele çekiliyor ve çekilen iki bilye değiştiriliyor. Bu Markov zincirinin durum uzayı **A** torbasındaki mavi bilyelerin sayısı olarak tanımlanıyor. Bu Markov zincirinin bir adım geçiş matrisini oluşturunuz?

Çözüm: Aşağıdaki şekilde *torbalardaki* muhtemel bilye sayıları veriliyor.



Şekil 1

Bu şekil yardımı ile $E = \{0, 1, 2, 3\}$ olur ve bir adım geçiş matrisi de aşağıdaki gibidir.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem 3. $\{X_n,\ n \geq 0\}$, $E = \{0, 1,2, \dots\}$ durum uzaylı bir Markov zinciri ve $x_i \epsilon\ E\ ; i = 0,1,2, \dots , n$ olmak üzere şöyledir:

$$P(X_1 = a_1, \dots , X_n = a_n | X_0 = a_0) = p_{a_0 a_1} p_{a_1 a_2} \dots p_{a_{n-1}, a_n}$$

İspat. İspat.

$P(X_1 = a_1, \dots , X_n = a_n | X_0 = a_0)$

$= P(X_1 = a_1 | X_0 = a_0)\ P(X_2 = a_2 | X_0 = a_0, X_1 = a_1) \dots P(X_n = a_n | X_0 = a_0, \dots , X_{n-1} = a_{n-1})$

Markov özelliğinden

$= P(X_1 = a_1 | X_0 = a_0)\ P(X_2 = a_2 | X_1 = a_1) \dots P(X_n = a_n | X_{n-1} = a_{n-1})$

$= p_{a_0 a_1} p_{a_1 a_2} \dots p_{a_{n-1}, a_n}$

Sonuç.

$P(X_0 = a_0, X_1 = a_1, \dots , X_n = a_n)$

$= P(X_0 = a_0) P(X_1 = a_1 | X_0 = a_0)\ P(X_2 = a_2 | X_0 = a_0, X_1 = a_1) \dots$

$P(X_n = a_n | X_0 = a_0, \dots , X_{n-1} = a_{n-1})$

Markov özelliğinden

$= P(X_0 = a_0) P(X_1 = a_1 | X_0 = a_0)\ P(X_2 = a_2 | X_1 = a_1) \dots$

$P(X_n = a_n | X_{n-1} = a_{n-1})$

$= p_{a_0} p_{a_0 a_1} p_{a_1 a_2} \dots p_{a_{n-1}, a_n}$,

elde edilir.

Örnek. $\{\ X_n, n \geq 0\ \}$ $E = \{0,1,2, \dots\}$ durum uzaylı bir Markov zinciri olsun. $i, j, k\ \in E$ olmak üzere $P(X_6 = j,\ X_7 = k /\ X_4 = i)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm. (6) eşitliğinden

$P(X_6 = j,\ X_7 = k / X_4 = i)$

$$= P(X_7 = k /\ X_4 = i,\ X_6 = j)\ P(X_6 = j\ / X_4 = i)$$

Markov zincirinin belleksizlik özelliğinden yukarıdaki eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$P(X_6 = j,\ X_7 = k / X_4 = i) = P(X_7 = k /\ X_6 = j) P\ (X_6 = j /\ X_4 = i)$

$$= p_{ij}^{(2)} p_{jk}$$

olur.